Allegato n. 1

1. Date le parabole P_1 di equazione $y=2x^2-5x+3$ e P_2 di equazione $y=-2x^2+7x-5$ trovare almeno una isometria che trasforma P_1 in P_2

[$|a| = 2 \Rightarrow P_1 \cong P_2$; $S_c = \begin{cases} x' = -x+3 \\ y' = -y+1 \end{cases}$ oppure $T \circ S_x$ con $S_x = \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ e $T = \begin{cases} x' = x + \frac{1}{2} \\ y' = y+1 \end{cases}$

A = $\begin{cases} x' = x + \frac{1}{2} \\ y' = -y+1 \end{cases}$]

2. Data la trasformazione $T = \begin{cases} x' = x+2y-2 \\ y' = 2x-y+2 \end{cases}$ riconoscerla e trasformare il triangolo ABC, avente i lati sulle rette di equazioni $y=2x$, $y=x-1$, $x=2$, nel triangolo A'B'C' di cui sono richieste le coordinate dei vertici e l'area.

[Similitudine: punto unito U(0;1) ; det=-5; $k=\sqrt{5}$; A(- 1 ;- 2); B(2 ;4); C(2 ;1);Area = 9/2; A'(-7 ;2); B'(8 ;2); C'(2 ;5);Area (A'B'C')=45/2]

3. Scrivere l'equazione della circonferenza C di diametro AB con A(-1;1) e B(1,1) e l'equazione delle tangenti t_1 e t_2 a C nei suoi punti M e N di ordinata $y = \frac{3}{2}$.

Considerata l'affinità Ω di equazioni $\begin{cases} x' = 2y-3 \\ y' = x-y+3 \end{cases}$, determinarne gli elementi uniti e quanto serve a caratterizzarla.

Siano C', t_1' e t_2' le curve trasformate di C, t_1 e t_2 nella affinità Ω. Calcolare l'area della regione piana compresa tra C', t_1' e t_2' e trovare i punti di tangenza tra C' e le due tangenti t_1', t_2'.

[$x^2+y^2-2y=0$; t_1 : $y = \sqrt{3}x+3$; t_2 : $y = -\sqrt{3}x+3$ $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$; $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$; affinità omologica di asse $x-2y+3=0$; m = - 1 ; k= -2 ; A' = $2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$]

4. Data la parabola P di equazione $y=x^2-2$ scrivere le equazioni delle tangenti t_1 e t_2 uscenti dal punto A(0;-3) e indicare con B e D i punti di tangenza.
Scrivere l'equazione della circonferenza C di diametro BD.
Considerata l'affinità Ω di equazioni $\begin{cases} x' = 2y+3 \\ y' = -3x+2 \end{cases}$ determinarne gli elementi caratteristici.
Scrivere le equazioni delle trasformate P', C', t_1' e t_2' rispettivamente di P, C, t_1 e t_2 nella affinità Ω e calcolare l'area della regione R compresa tra le due rette t_1' e t_2' e l'arco di C' contenente O' trasformato di O(0;0).

[t_1: $y = 2x-3$; t_2: $y = -2x-3$; B(1 ; - 1) ; D (-1; -1); $x^2+y^2+2y=0$; affinità : U(1 ; - 1) punto unito ; nessuna retta unita nè direzioni unite ; P' : $x' = \frac{2}{9}y'^2 - \frac{8}{9}y' - \frac{1}{9}$; C': $\frac{(x'-1)^2}{4} + \frac{(y'-2)^2}{9} = 1$; t'_1: $3x'+4y'+1=0$; t'_2: $3x'-4y'+17=0$; A' = $6\left(\frac{\pi}{2}+2\right)$]

5. Data l'ellisse di equazione $3x^2+y^2=1$ trovare le tangenti r, s, t, u parallele alle rette $y=3x$ e $y=-3x$. Tali tangenti individuano il rombo ABCD e i punti di tangenza individuano il quadrato MNPQ.

Data l'affinità Ω di equazioni $\begin{cases} x' = -x-y-4 \\ y' = -2x+1 \end{cases}$ determinare gli elementi uniti.

2

Scrivere le equazioni delle trasformate r', s' , t', u' delle tangenti r,s,t,u e calcolare l'area della regione finita compresa tra i due parallelogrammi A'B'C'D' e M'N'P'Q'.

[$y = 3x \pm 2$; $y = -3x \pm 2$; A(0;2) ; B(− 2/3 ; 0) ; C(0 ; − 2) ; D(2/3 ;0) ; M(1/2 ;1/2) ; N(− 1/2 ;1/2) ; P(− 1/2 ; − 1/2) ; Q(1/2 ; − 1/2) ; affinità con una retta unita globalmente :y= −2x − 7/3;direzione unita m =1; nessun punto unito;y' = x'/2 + 4 ; y' = x'/2 + 2; y'= − x' − 5 ; y' = − x' − 1; .A' = 10/3]

6. Scrivere l'equazione dell'iperbole I avente per asintoti le rette di equazione $y = \pm\sqrt{3}x$ e vertice A(1;0)

Dopo aver riconosciuta la trasformazione di equazioni $\begin{cases} x' = -y+1 \\ y' = x-1 \end{cases}$ scrivere l'equazione della trasformata I' della iperbole data.

[I : $3x^2-y^2 = 3$; ROT: C(1;0); $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$; $\begin{cases} x = y'+1 \\ y = -x'+1 \end{cases}$; I' :$3(y'+1)^2-(x'-1)^2=3$; C(1; − 1) centro di I']

7. Date tre coppie di punti corrispondenti O(0;0) e O'(2;−1) , A(1;0) e A'(3;2),B(0;1) e B'(−1;1) scrivere le equazioni della affinità , trovare gli elementi che la caratterizzano e le equazioni delle trasformate delle parallele agli assi cartesiani.

[$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$; U(2/3; 1/9) punto unito; non ci sono direzioni unite; − 3x'+y'+7−11h=0; 2x'+3y'−1−11k=0]

8. Data la trasformazione T di equazioni $T = \begin{cases} x' = ax+by+1 \\ y' = 2y-2 \end{cases}$ trovare i parametri reali a e b tali che la retta r di equazione 6x−11y+1=0 venga trasformata da T nelle retta r' di equazione 3x'−y'−4=0. Studiare la trasformazione.

Scrivere l'equazione della parabola P' trasformata della parabola P di equazione $x=y^2-2y$ mediante T.

[a = 2 ; b = − 3; affinità: U(5;2) punto unito; direzione unita m = 0; retta unita globalmente : y = 2; $x = \dfrac{1}{2}y'^2 - \dfrac{3}{2}y' - 4$]

9. Scrivere l'equazione dell'omotetia di centro C(4;−3) e che trasforma A(2;1) in A'(0;5),dopo aver verificato che esiste.

Trasformare la circonferenza C di equazione $x^2+y^2+2x=0$ e le tangenti ad essa uscenti dal punto P(0;3). [C , A , A' sono allineati;

$\Omega = \begin{cases} x' = 2x-4 \\ y' = 2y+3 \end{cases}$, $\Omega^{-1} = \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}x'+2 \\ y = \dfrac{1}{2}y' - \dfrac{3}{2} \end{cases}$; t_1: x=0; t_2: $y = \dfrac{4}{3}x + 3$;

t'_1: x'= − 4; t'_2: $y' = \dfrac{4}{3}x' + \dfrac{43}{3}$; C': $x'^2 + y'^2 + 12x' - 6y' + 41 = 0$]

10. Scrivere l'equazione dell' affinità Ω che manda O(0;0) in O'(0;2) e trasforma i versori come segue $\vec{i} \rightarrow \vec{i}' = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{j} \rightarrow 3\vec{i} + 4\vec{j}$ .Trasformare mediante Ω i punti A(2;0),B(6;0),C(2;2),D(6;2) e verificare che i punti trasformati A'B'C'D' determinano un parallelogramma di cui si chiede l'area.

[$\begin{cases} x' = x+3y \\ y' = -x+4y+2 \end{cases}$ A'(2 ;0);B'(6 ;−4);C'(12 ;4);D'(8 ;8); A(ABCD) = 8; A(A'B'C'D') = 56]